个人主页地址，点击地址进入：
http://www.ctdisk.com/u/945813
更多资料，见主页
QQ群：2421181462
http://www.ctdisk.com/u/945813

VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

考研数学-线性代数讲义

主讲：朱长龙

欢迎使用新东方在线电子教材

目 录

第一讲 行列式......1
第二讲 矩阵......9
第三讲 向量......22
第四讲 线性方程组......30
第五讲 特征值和特征向量......36
第六讲 二次型......41

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

第一讲 行列式

◇考试内容◇

行列式的概念和基本性质 行列式按行（列）展开定理

◇考试要求◇

1．了解行列式的概念，掌握行列式的性质.

2．会应用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式.

◇基本概念、公式与方法精讲◇

一、行列式的概念

1 排列与逆序数

（1）排列

把 n 个不同的元素排成一列，就叫做这 n 个元素的全排列，简称排列。比如 123 为一个 3 级排列，51324 是一个 5 级排列。

【概念理解点睛】不同的 n 级排列共有 $n!$ 个.

（2）逆序、逆序数

在一个 n 级排列 $j_1\cdots j_n$ 中，若一对数 $j_s j_t$，大前小后，即 $j_s > j_t$，则 $j_s j_t$ 构成了一个逆序。一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数，记为 $\tau(j_1\cdots j_n)$。如：51324 逆序数是 5，记作 $\tau(51324)=5$，$\tau(123)=0$.

（3）对换

排列 $j_1\cdots j_n$ 中，交换任两个数的位置，其余不变，则称对排列作了一次对换.

【概念理解点睛】对换一次改变排列的奇偶性。如 $\tau(123)=0,\tau(321)=3$.

2 n 阶行列式的定义

（1）引例

（2）定义

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

$$D_n=\Delta(a_{ij})_{n\times n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}\cdots a_{j_nn}$$

【概念理解点睛】

D_n 是一个数值，是 $n!$ 项的代数和，每项均取自不同行不同列的 n 个元素的乘积；

【例 1.1】上三角行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

二、行列式的性质

性质 1 行列式的行与列（按原顺序）互换，（互换后的行列式叫做行列式的转置）其值不变，即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

性质 2 行列式的两行对换，行列式的值反号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【概念理解点睛】

i）行列式中两行对应元素全相等，其值为零，即当 $a_{il}=a_{jl}(i\neq j,l=1,2,\cdots,n)$ 时，有

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

ii）若换奇数次则变号，偶数次不变。

性质 3 行列式的某行（或列）元素都乘k，则等于行列式的值也乘k

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 4 如果行列式某行（或列）元素皆为两数之和，则其行列式等于两个行列式之和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【概念理解点睛】

（1）某行元素全为零的行列式其值为零；

（2）$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ c_1+d_1 & c_2+d_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_2 \\ d_1 & c_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$.

性质 5 在行列式中，把某行各元素分别乘非零常数k，再加到另一行的对应元素上，行列式的值不变（简称：对行列式做倍加行变换，其值不变），即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

【例 1.2】计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}, a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$.

【例 1.3】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

三、行列式的展开定理（降阶法的基础）

1 引例与余子式与代数余子式

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

【概念理解点睛】

i）余子式和代数余子式都是比原行列式低一阶的行列式，其值只与 a_{ij} 的位置有关，而与 a_{ij} 的取值无关. 如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} J & 10 & Q \\ a_{21} & K & a_{23} \\ a_{31} & A & a_{33} \end{vmatrix}$，$a_{12}$ 与 0 的余子式与代数余子式是相等的；

ii）M_{ij}, A_{ij} 最多差一个符号.

2 行列式的展开定理

行列式对任一行（列）展开，其值相等，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij},(i=1,2,\cdots,n)$$

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，M_{ij} 是 D 中去掉第 i 行第 j 列全部元素后，按原顺序排成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

【概念理解点睛】

i）运用展开定理降阶时，应先用性质化某行（或列）只剩一个非零元；

ii）行列式某一行（或列）的元素乘另一行（或列）对应元素的代数余子式之和等于零，

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

即$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$.

【例 1.4】 设行列式$D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$则第 4 行元素余子式之和的值为__________.

【例 1.5】范德蒙行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

这里$\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})$.

【例1.6】计算行列式$D_5=\begin{vmatrix}4&3&&&\\1&4&3&&\\&1&4&3&\\&&1&4&3\\&&&1&4\end{vmatrix}$之值.

【方法运用点睛】

计算行列式的方法

（1）用定义；

（2）三角形法，利用性质，将行列式化为较简单或容易计算的行列式（如上、下三角行列式）；

（3）降阶展开法，即利用性质将某行（或列）的元素尽可能多的化为零，然后按该行（或列）展开，将n阶行列式计算化为$n-1$阶行列式的计算；

（4）范德蒙行列式；

（5）递推法，是在降阶中找出高阶行列式D_n与低阶行列式D_r（$r<n$，通常是$r=n-1$）的关系，即递推公式，利用递推公式递推求得D_n；

（6）特征值法；

（7）分块法.

四、克莱姆法则

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

1 引例

2 克莱姆法则 n 个未知量 n 个方程的线性方程组，在系数行列式不等于零时的方程组解法

定理 设线性非齐次方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ (I)或简记为

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1,2,\cdots,n$，其系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$，则方程组(I)有唯一解 $x_j = \dfrac{D_j}{D}, j = 1,2,\cdots,n$，其中 D_j 是用常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 替换 D 中第 j 列所成的行列式，

即 $D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

【概念理解点睛】

（1）若非齐次方程组无解，则 $D = 0$；

（2）若齐次线性方程组 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 (i = 1,2,\cdots,n)$ 的系数行列式 $D = \left|a_{ij}\right|_1^n \neq 0$，则方程组只有零解 $x_j = 0, j = 1,2,\cdots,n$。（此时 $D_j = 0, j = 1,2,\cdots,n$）；

（3）若齐次线性方程组有非零解，则系数行列式 $D = \left|a_{ij}\right|_1^n = 0$。

【例 1.7】 求解下列三元线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$.

【例 1.8】 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 + bx_4 = 0 \end{cases}$ 有非零解时，a, b 必须满足什么条件？

◇基本题型与典型例题◇

【题型 1】 与行列式的定义和性质相关的命题

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

思路与方法：定义与性质

【例 1】填空

（1）在 5 阶行列式中，项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号应取________

（2）4 阶行列式中，带负号且包含因子 a_{23} 与 a_{31} 的项为________

（3）在函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中，x^3 的系数是______

【题型 2】数值型行列式的计算

思路与方法：（1）定义法；（2）三角形法；（3）降阶法；（4）范德蒙行列式法；（5）分块法；（6）特征值法。

【例 2】证明：$D_n=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}=(n+1)a^n$

【题型 3】行列式的余子式或代数余子式线性组合的计算

思路与方法：（1）定义法；

（2）逆用行列式按行（列）展开定理

【例 3】已知 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$，求 $A_{13}+A_{23}+A_{43}$

【题型 4】含 λ 的行列式的计算

思路与方法：（1）行和相等加列；列和相等加行；

（2）找零

【例 4】求下列方程的根

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

（1）$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda-2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix}=0$；（2）$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}=0$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

第二讲　矩阵

◇考试内容◇

矩阵的概念　矩阵的线性运算　矩阵的乘法　方阵的幂　方阵乘积的行列式　矩阵的转置　逆矩阵的概念和性质　矩阵可逆的充分必要条件　伴随矩阵　矩阵的初等变换　初等矩阵　　矩阵的秩　矩阵的等价　分块矩阵及其运算

◇考试要求◇

1．理解矩阵的概念，了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵，以及它们的性质.

2．掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质.

3．理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质，以及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求逆矩阵.

4．理解矩阵初等变换的概念，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念，理解矩阵的秩的概念，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法.

5．了解分块矩阵及其运算.

◇基本概念、公式与方法精讲◇

一、矩阵的定义

1　引例

2　定义

数域 F 中 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列，并括以圆括弧（或方括弧）的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为数域 F 上的 $m\times n$ 矩阵，通常用大写字母记做 A 或 $A_{m\times n}$，有时也记作

$A=(a_{ij})_{m\times n}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，其中 a_{ij} 称为矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素。 横排为行，竖排为列.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

【概念理解点睛】

矩阵和行列式是有本质区别的。行列式是一个算式，一个数字行列式经过计算可求得其值，行数和列数一致。而矩阵仅仅是一个数表，它的行数和列数也可以不同。

3 同型矩阵与矩阵相等

同型矩阵： 行数、列数都相同的矩阵.

矩阵相等：如果两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵，且各对应元素也相等，即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，就称 A 和 B 相等，记作 $A=B$.

4 几类特殊的矩阵：

（1）零矩阵 $m\times n$ 个元素全为零的矩阵称为零矩阵，记作 $\mathbf{0}$.

（2）只有一行的矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} \dots a_{1n}\end{pmatrix}$ 称为行矩阵，又称行向量。为避免元素间的混淆，行矩阵也记作 $A=(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n})$。只有一列的矩阵 $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ 称为列矩阵或列向量.

（3）方阵 当 $m=n$ 时，称 A 为 n 阶矩阵（或 n 阶方阵）.

1° 单位矩阵 主对角元全为 1，其余元素全为零的 n 阶矩阵，称为 n 阶单位矩阵 （简称单位阵），记作 I_n 或 I 或 E.

2° 数量矩阵 主对角元全为非零数 k，其余元素全为零的 n 阶矩阵，称为 n 阶数量矩阵，记作 kI_n 或 kI 或 kE.

3° 对角矩阵 非主对角元皆为零的 n 阶矩阵称为 n 阶对角矩阵（简称对角阵），记作 Λ，即 $\Lambda=\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{pmatrix}$，或记作 $diag(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

4° 上（下）三角矩阵 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0(j=1,2,\cdots,n-1)$ 的矩阵称为上三角矩阵. 下三角矩阵 当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0(j=2,3,\cdots,n)$ 的矩阵称为下三角矩阵.

5° 对称矩阵与反对称矩阵

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

6° 正交矩阵 若n阶矩阵A满足$A^TA=E$，则称A为n阶正交矩阵，这里E是n阶单位矩阵.

二、矩阵的运算

1 矩阵的线性运算

（1）加法

设$A=(a_{ij})$和$B=(b_{ij})\in F^{m\times n}$，规定

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

并称$A+B$为A与B之和.

（2）矩阵的数量乘法（简称数乘）

设k是数域F中的任意一个数，$A=(a_{ij})\in F^{m\times n}$，规定

$$kA=(ka_{ij})=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

并称这个矩阵为k与A的数量乘积.

【概念理解点睛】

线性运算规律与数的加和乘运算规律一致

i）$kA=0\Leftrightarrow k=0$或$A=0$；

ii）数乘矩阵满足交换律、结合律与分配率阵的线性运算.

2 矩阵的乘法

设A是一个$m\times n$矩阵，B是一个$n\times s$矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

则A与B之乘积AB（记作$C=(c_{ij})$）是一个$m\times s$矩阵，且

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

即矩阵 $C = AB$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 是 A 的第 i 行 n 个元素与 B 的第 j 列相应的 n 个元素分别相乘的乘积之和.

【概念理解点睛】

矩阵乘法运算规律有别于数乘法的运算律

i）矩阵的乘法不满足交换律，即一般 $AB \neq BA$，可从 3 个方面来理解：

1° AB 可乘，BA 不一定可乘（例 1）

2° AB 和 BA 都可乘，但不一定是同型矩阵（例 2）

3° AB 和 BA 为同型矩阵（此时，A, B 必为同阶方阵），也不一定相等（例 3）

ii）矩阵乘法不满足消去律，即 $A \neq 0$ 时，由 $AB = AC$，不能推出 $B = C$，由 $AB = 0$，不能推出 $A = 0$ 或 $B = 0$.

iii）$A_{m\times n}E_n = E_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$

【例 2.1】 设 A, B 分别是 $n\times 1$ 和 $1\times n$ 矩阵，且 $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，计算 AB 和 BA.

【例 2.2】用矩阵表示一般的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

3 方阵的幂

（1）乘幂

设 A 是 n 阶矩阵，k 个 A 的连乘积称为 A 的 k 次幂，记作 A^k，即 $A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k\text{个}A}$，规定 $A^0 = E$。

（2）方阵的多项式

设 $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是 x 的 k 次多项式，A 是 n 阶矩阵，则 $f(A) = a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E_n$，称为矩阵 A 的 k 次多项式（注意常数项应变为

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

a_0E_n）.

【概念理解点睛】

i）只有方阵才有幂；

ii）当 m,k 为正整数时，有 $A^mA^k=A^{m+k}$，$(A^m)^k=A^{mk}$，但 $(AB)^k\neq A^kB^k$；

iii）方阵 A 的多项式可因式分解，$A^2-E=(A+E)(A-E)=(A-E)(A+E)$，$(A+E)^2=A^2+2A+E$.

【例 2.3】 求例 1 中的 $(AB)^m,(BA)^m$

4 矩阵的转置

（1）定义 把一个 $m\times n$ 矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$ 的行列互换得到的一个 $n\times m$ 矩阵，称之为 A 的转置矩阵，记作 A^T 或 A'，即 $A^T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$.

（2）性质

矩阵的转置也是一种运算，满足运算律：

$1^\circ\ (A^T)^T=A;\quad (kA)^T=kA^T$（$k$ 为任意实数）

$2^\circ\ (AB)^T=B^TA^T$.

$3^\circ\ (aA+bB)^T=aA^T+bB^T$;

5 方阵的行列式

• 由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式（各元素的位置不变），称为方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$.

• 运算性质

$1^\circ\ |A^T|=|A|$ $2^\circ\ |kA|=k^n|A|$ $3^\circ\ |AB|=|A||B|$

【方法运用点睛】

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

i）$\left|A^k\right|=|A|^k$，k 为自然数；

ii）$|A\pm B|\neq|A|\pm|B|$；

iii）若 $A=0$，则 $|A|=0$；若 $|A|=0\not\Rightarrow A=0$.

【例 2.4】 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$，其中 A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式。证明：$AA^*=A^*A=|A|E_n$.

【例 2.5】 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，则 $|B|=$________

三、逆矩阵

1 引例

2 可逆矩阵的定义

对于 n 阶方阵 A，如果存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=BA=E$，就称 A 为可逆阵（简称 A 可逆），并称 B 是 A 的逆矩阵，记作 A^{-1}，即 $A^{-1}=B$

【概念理解点睛】

i）只有方阵才有逆，可逆矩阵及其逆矩阵是同阶方阵。 也可以说，A 是 B 的逆矩阵；

ii）若 A 是可逆矩阵，则 A 的逆矩阵是唯一的.

iii）单位矩阵的逆矩阵是其自身，可逆对角矩阵的逆是主对角元素都取倒数构成的对角阵；

3 矩阵可逆的条件

定理 矩阵 A 可逆的充要条件是 $|A|\neq 0$。

【概念理解点睛】

i）求逆公式 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$.

ii）$\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$；

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

推论 若 A,B 都是 n 阶矩阵，且 $AB=E$，则 $BA=E$ ，即 A,B 皆可逆，且 A,B 互为逆矩阵.

【例 2.6】 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$，其中 E 为单位矩阵，则 $(A-E)^{-1}=$______.

【例 2.7】 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$，求 $(E-A)^{-1}$.

4 可逆矩阵的性质

设同阶方阵 A,B 皆可逆，$k\neq 0$，

(1) 若 A 可逆，则 A^{-1} 亦可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$；

(2) 若 A 可逆，数 $k\neq 0$，则 kA 亦可逆，且 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$ （k 为非零常数）；

(3) 若 A,B 为同阶矩阵且均可逆，则 AB 亦可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，推广：

$(A_1A_2\cdots A_s)^{-1}=A_s^{-1}A_{s-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$；$(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$；

(4) 若 A 可逆，则 A^T 亦可逆，且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$；

(5) $|A^{-1}|=|A|^{-1}$.

【例 2.8】 设 A,B 均为 n 阶可逆矩阵，证明：$(AB)^*=B^*A^*$.

四、分块矩阵

定义 把一个大型矩阵分成若干小块，构成一个分块矩阵，这是矩阵运算中的一个重要技巧，它可以把大型矩阵的运算化为若干小型矩阵的运算，使运算更为简明.

例：把一个 5 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&1&\vdots&1&0&-1\\1&2&\vdots&2&-3&0\\\cdots&\cdots&\vdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\vdots&1&0&0\\0&0&\vdots&0&1&0\\0&0&\vdots&0&0&1\end{pmatrix}$$

用水平和垂直的虚线分成 4 块，如果记

$$A_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-3&0\end{pmatrix},\quad O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad I_3=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

就可以把 A 看成由上面 4 个小矩阵所组成，写成 $A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & I_3 \end{pmatrix}$，并称它是 A 的一个 2×2 分块矩阵，其中的每一个小矩阵称为 A 的一个子块.

把一个 $m\times n$ 矩阵 A，在行的方向分成 s 块，在列的方向分成 t 块，称为 A 的 $s\times t$ 分块矩阵，记作 $A=(A_{kl})_{s\times t}$，其中 $A_{kl}(k=1,2,\cdots,s;l=1,2,\cdots,t)$ 称为 A 的子块，它们可以是各种类型的小矩阵.

1 分块矩阵的运算

（1）分块矩阵的加法

$A=(A_{kl})_{s\times t},B=(B_{kl})_{s\times t}$，则 $A+B=(A_{kl}+B_{kl})_{s\times t}$

要求： A,B 的行数相同，列数相同，采用相同的分块法.

（2）分块矩阵的数量乘法

设分块矩阵 $A=(A_{kl})_{s\times t},\lambda$ 是一个数，则 $\lambda A=(\lambda A_{kl})_{s\times t}$

要求：无.

（3）分块矩阵的乘法

设 $A_{m\times n},B_{n\times p}$，如果 A 分块为 $r\times s$ 分块矩阵 $(A_{kl})_{r\times s},B$ 分块为 $s\times t$ 分块矩阵 $(B_{kl})_{s\times t}$，

$$\text{则}\quad AB=\begin{matrix} j_1\text{列}\ \ j_2\text{列}\cdots j_s\text{列} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} & \vdots\cdots\vdots & A_{1s} \\ A_{21} & \vdots & A_{22} & \vdots\cdots\vdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \ \vdots & \vdots \\ A_{r1} & \vdots & A_{r2} & \vdots\cdots\vdots & A_{rs} \end{pmatrix}\end{matrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix}\begin{matrix} j_1\text{行} \\ \\ j_2\text{行} \\ \\ \\ \\ j_s\text{行} \end{matrix} = C \text{记作} (C_{kl})_{r\times t}$$

其中 C 是 $r\times t$ 分块矩阵，且 $C_{kl}=\sum_{i=1}^{s}A_{ki}B_{il},(k=1,2,\cdots,r;l=1,2,\cdots,t)$.

要求： A 的列的分块法和 B 的行的分块法完全相同.

（4）分块矩阵的转置

分块矩阵 $A=(A_{kl})_{s\times t}$ 的转置矩阵为 $A^T=(B_{lk})_{t\times s}$，其中

$$B_{lk}=A_{kl}^T,l=1,2,\cdots,t;k=1,2,\cdots,s$$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

要求：不仅要行（块）与列（块）互换，而且每一子块也要转置.

（5）分块对角阵的行列式与可逆分块矩阵的逆矩阵

对角块矩阵（准对角矩阵）$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$，其中 $A_j, i=1,\cdots,m$ 为方阵，则

$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_m|$，因此，对角块矩阵 A 可逆的充要条件为 $|A_i|\neq 0. i=1,2;\cdots,m$，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^{-1} \end{pmatrix}.$$

【例 2.9】 设 $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，求 $|A|, A^{-1}$.

2 两种常用的分块法

B 是 $m\times n$ 矩阵，$B \overset{\text{按行分块}}{=} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \overset{\text{按列分块}}{=} (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n)$

【方法运用点睛】

i）$m\times n$ 矩阵既可看成是由 m 个 n 维行向量组成，也可看成是由 n 个 m 维列向量组成；反之亦然；

ii）线性方程组的向量形式：

$$A_{m\times n}x=b \Leftrightarrow (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_nx_n=b$$

若 $b=0$，$A_{m\times n}x=0 \Leftrightarrow (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_nx_n=0$.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

五、矩阵的初等变换和初等矩阵

1 初等变换的定义

用消元法解线性方程组，其消元步骤是对增广矩阵进行 3 类行变换，推广到一般，即

（1） kr_i 或 $kc_i, k \neq 0$；

（2） $r_i + kr_j$ 或 $c_i + kc_j$；

（3） $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$.

【概念理解点睛】

i）用初等变换求解线性方程组时，只能用行变换；

ii）初等变换均可逆；

iii）方程组的初等变换保解，矩阵的初等变换保秩.

2 初等矩阵

（1）定义 将单位矩阵做一次初等变换所得的矩阵称为初等矩阵。

初等倍乘矩阵 $E_i(c) = diag(1,\cdots,1,c,1,\cdots,1)$， $E_i(c)$ 是由单位矩阵第 i 行（或列）乘 c（$c \neq 0$）而得到的；

$$\text{初等倍加矩阵}\quad E_{ij}(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & c & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$E_{ij}(c)$ 是由单位矩阵第 i 行乘 c 加到第 j 行而得到的，或由第 j 列乘 c 加到第 i 列而得到的；

$$\text{初等对换矩阵}\quad E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

E_{ij} 是由单位矩阵第 i, j 行（或列）对换而得到的.

（2）初等矩阵的作用

对 A 实施一次初等行（列）变换，相当于左（右）乘相应的初等矩阵

如：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$

$$E_{12}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

$E_i(c)A$ 表示 A 的第 i 行乘 c， $E_{ij}(c)A$ 表示 A 的第 i 行乘 c 加至第 j 行， $E_{ij}A$ 表示 A 的第 i 行与第 j 行对换位置.

【方法运用点睛】

i）“行左列右”；

ii）用最后一种初等矩阵要注意，在左边和有变的意义；

（3）初等矩阵的性质

$E_i^T(c) = E_i(c), E_{ij}^T(c) = E_{ji}(c)$， $E_{ij}^T = E_{ij}$；

$E_i^{-1}(c) = E_i(\frac{1}{c}), E_{ij}^{-1}(c) = E_{ij}(-c)$， $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$；

$E_i^*(c) = cE_i(\frac{1}{c}), E_{ij}^*(c) = E_{ij}(-c), E_{ij}^* = -E_{ij}$；

3 矩阵的等价

定义 存在可逆阵 P，Q，使得 $PAQ = B$. 则称 A 与 B 等价，记作 $A \cong B$.

【概念理解点睛】

i）矩阵的等价关系满足“三性”

①反身性: $A \cong A$；

②对称性:若 $A \cong B$,则 $B \cong A$；

③传递性:若 $A \cong B, B \cong C$,则 $A \cong C$.

ii） 同型矩阵 A 与 B 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$

iii）若 A 可逆，则 $A \cong E$.

4 利用初等变换求逆矩阵

如果对可逆矩阵 A 和同阶单位阵 E 做同样的初等行变换，那么当 A 变为单位阵时， E

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

就变为 A^{-1}，即

$$(A,E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E,A^{-1}).$$

【例 2.10】求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&1\\-1&2&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

◇基本题型与典型例题◇

【题型 1】有关数值型方阵逆的计算

思路与方法：（1）求逆公式；（2）初等变换；（3）分块求逆。

【例 1】 $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&4&0\\1&0&3\end{pmatrix}$，求 $(A-2E)^{-1}$

【例 2】 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}

【题型 2】有关数值型方阵逆的计算

思路与方法：（1） A 为数值型，用充要条件判断；（2） A 为抽象型，用定义与推论证明。

（3） A 可逆 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 只有零解

【例 3】设 A 为 n 阶方阵，满足 $A^2-A-5E=0$，求 $(A-3E)^{-1}$

【例 4】设 A，B 为 n 阶方阵，已知 $A-E$，B 都可逆，且 $(A-E)^{-1}=B^*-E$，证明：A 可逆，并求它的逆矩阵。

【题型 3】利用方阵行列式的性质求抽象型的行列式

思路与方法：（1）把伴随，逆，转置等化简；（2）利用方阵相乘行列式的性质；

【例 5】已知 $A^2B-A-B=E$，$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，求 $|B|$

【例 6】设 A 为 3 阶方阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$，试求 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

【题型 4】与伴随矩阵相关的命题

思路与方法：（1）$AA^*=A^*A=|A|E_n$；（2）$A^*=|A|A^{-1}$；（3）$(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}$；（4）$|A^*|=|A|^{n-1}$

【例 7】 设 A，B 为 n 阶方阵，$|A|=2$，$|B|=-3$，求 $|2A^*B^{-1}|$

【例 8】 已知 3 阶矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，试求伴随矩阵的逆矩阵。

【题型 5】初等变换与初等矩阵相关的命题

思路与方法：（1）明确初等矩阵的作用；（2）初等矩阵的运算性质

【例 9】 设 A 为 n（$n\geq 2$）阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B，A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵，则（ ）

（A） 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^*.

（B） 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^*.

（C） 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$.

（D） 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

第三讲　向量

◇考试内容◇

向量的概念 向量的线性组合与线性表示 向量组的线性相关与线性无关 向量组的极大线性无关组 等价向量组 向量组的秩 向量组的秩与矩阵的秩之间的关系 向量空间及其相关概念 n 维向量空间的基变换和坐标变换 过渡矩阵 向量的内积 线性无关向量组的正交规范化方法 规范正交基 正交矩阵及其性质

◇考试要求◇

1．理解 n 维向量、向量的线性组合与线性表示的概念.

2．理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.

3．理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩.

4．理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行（列）向量组的秩之间的关系.

5．了解 n 维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念.

6．了解基变换和坐标变换公式，会求过渡矩阵.

7．了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特（Schmidt）方法.

8．了解规范正交基、正交矩阵的概念以及它们的性质.

◇基本概念、公式与方法精讲◇

一、n 维向量的概念与运算

1 定义

n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 构成的有序数组，称为一个 n 元向量（也称 n 维向量），记作 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中 a_i 称为 a 的第 i 个分量。向量写成上述形式称为行向量，写成列的形式 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 称为列向量.

2 线性运算

设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，定义：

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

（1）$\alpha=\beta$，当且仅当 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$.

（2）向量加法（α 与 β 之和）$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$.

（3）向量的数量乘法（简称数乘）为 $k\alpha=\left(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n\right)$，$k\alpha$ 称为向量 α 与数 k 的数量乘积.

【例 3.1】设 $\alpha_1=(2,0,0)^T,\alpha_2=(0,-1,0)^T,\alpha_3=(0,0,1)^T$，求 $\alpha_1-3\alpha_2+4\alpha_3$.

二、线性相关性

1 线性组合、线性表出

对于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$， $\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$ 称为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个线性组合，$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为这个线性组合的系数。

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量 b，如果存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使

$$b=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m,$$

则向量 b 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合，称向量 b 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

【概念理解点睛】

i）向量组中任一向量均可由该向量组本身线性表示.

如：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$， $\alpha_i=0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+1\alpha_i+\cdots+0\alpha_m$；

ii）若 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中的部分向量线性表示，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示；

iii）讨论一个向量能否由一组向量线性表示的一般方法是利用方程组

β 能（不能）由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ 存在（不存在）$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\beta$ 成立

$\Leftrightarrow$ 方程组 $\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)x=\beta$ 有（无）解.

2 线性相关与线性无关

如果对 m 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，有 m 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 成立，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，否则，称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

【概念理解点睛】

i）包含零向量的任何向量都是线性相关的.

ii）单个向量α 线性相关（无关）

【例 3.2】设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明：$\alpha_1-\alpha_3,2\alpha_1-\alpha_2,2\alpha_3-\alpha_2$线性相关；

【例 3.3】设 A 是n阶矩阵，α 是n维列向量，若$A^{m-1}\alpha\neq 0$，$A^m\alpha=0$，

证明：$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{m-1}\alpha$线性无关。

3 向量组线性相关性的基本性质

定理 1 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geq 2)$线性相关的充要条件是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表示.

定理 2 $\alpha_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{r1})^T$，$\alpha_2=(a_{12},a_{22},\cdots,a_{r2})^T$，$\alpha_n=(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{rn})^T$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关的充要条件是齐次线性方程组$Ax=0$有非零解,其中$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

上述定理的等价命题是：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充要条件是齐次线性方程组$Ax=0$只有零解.

定理 3 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关,而$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关,则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示,且表示法唯一.

三、向量组的极大无关组与秩

1 定义 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的部分组$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$满足条件：

（1）$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$线性无关；

（2）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中的任一向量均可由它们线性表示，则称向量组$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个极大无关组。 向量组的极大无关组所含向量的个数称为向量组的秩，记为$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$.

【概念理解点睛】

i）$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\leq s$；

ii）若$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r\leq s$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意$r$个线性无关的向量组均可作为极大无关组；

iii）一个向量组，若个数大于维数则必线性相关。

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

2 向量组的等价

如果向量组中每一个向量可由向量组线性表示，就称前一个向量组可由后一个向量组线性表示。如果两个向量组可以相互线性表示，则称这两个向量组是等价的。

【概念理解点睛】

i）满足“三性” ①反身性；②对称性； ③传递性；

ii）向量组和它的极大线性无关组等价；

iii）两向量组等价 $\Leftrightarrow$ 其极大无关组等价 $\Leftrightarrow$ 两向量组的秩相等，且能相互线性表出.

3 向量组秩的性质

性质 1 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$；如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$.

性质 2 若 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，则

$$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s).$$

性质 3 若向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，且 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性无关，则 $t\le s$

性质 4 若向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，且 $t>s$，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性相关.

【例 3.4】 设 n 维向量 $\varepsilon_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$，即第 i 个分量为 1，其余分量为 0，则 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性无关的。若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

四、矩阵的秩

1 k 阶子式

矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的任意 k 个行和任意 k 个列的交点上的 k^2 个元素按原顺序排成 k 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}$ 称为 A 的 k 阶子式.

2 矩阵的秩

矩阵 A 中存在一个 r 阶子式不为零，而所有 r+1 阶子式全为零（非零子式的最高阶数），则称矩阵的秩为 r，记为 $r(A)=r$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

【概念理解点睛】

（1） $r(A_{m\times n})\le \min\{m,n\}$；

（2） $r(A)=r \Leftrightarrow A$中有r阶子式不为 0，任何$r+1$阶子式（若还有）必全为 0

$r(A)<r \Leftrightarrow A$中r阶子式全为 0

$r(A)\ge r \Leftrightarrow A$中有$r$阶子式不为 0

特别的，$r(A)=0 \Leftrightarrow A=0$， $A\ne 0 \Leftrightarrow r(A)\ge 1$.

3 矩阵秩的基本性质

（1）初等变换不改变矩阵的秩。

设 A 是 $m\times n$ 矩阵, P,Q 分别是 m 阶, n 阶可逆矩阵,则

$$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$$

（2）矩阵的秩=行秩=列秩=矩阵的非零子式的最高阶数（三秩相等）。

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(A)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=r(\beta_1,\cdots,\beta_n)$；

$=A$的非零子式的最高阶数

（3） A 为 n 阶方阵， $r(A)=n \Leftrightarrow |A|\ne 0 \Leftrightarrow A_{行},A_{列}$ 线性无关；

（4）设 A 是 $m\times n$ 矩阵,则 $r(A)=r(A^T)\le \min(m,n)$； $r(kA)=r(A),k\ne 0$；

（5） $r(A+B)\le r(A)+r(B)$；

（6） $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$——“矩阵越乘秩越小” .

【例 3.5】设

$\alpha_1=(1\ \ 1\ \ 1\ \ 3)^T,\alpha_2=(-1,\ -3,\ 5,\ 1)^T,\alpha_3=(3\ \ \ 2\ \ \ -1\ \ \ p+2)^T,\alpha_4=(-2\ \ \ -6\ \ \ 10\ \ \ p)^T$,

① P 为何值时，向量组线性无关？② P 为何值时，向量组线性相关？

五、向量空间

1 向量空间的基本概念（数一）

（1）向量空间：设 V 是 n 维向量的集合，如果 V 非空，且对于向量的加法和数乘两种运算封闭，即 V 中两个向量之和及数乘 V 中向量所得到的向量仍属于 V,则称 V 为向量空间.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

（2）基： V 的极大无关组.

（3）维数： 基包含向量的个数.

（4）坐标： 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维向量空间 V 的一个基，对任一元素 $\alpha\in V$，总有且仅有一组数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标，记为 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

（5）基变换与过渡矩阵

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 都是 n 维向量空间 V 的基，且

$$\begin{cases}\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\ \cdots \\ \beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n\end{cases} \quad ①$$

即

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C \quad ②$$

称 C 为基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵. ①或②称为基变换公式.

坐标变换公式　设 $\alpha\in V$，α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标为 $(y_1,y_2,\cdots y_n)$，且 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C$（$C$ 是从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵），则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}.$$

2 向量的内积

（1）内积： 设有 n 维向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，则称

$$(x,y) = x^Ty = y^Tx = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

为向量 x 与 y 的内积.

内积具有以下的运算性质：

① $(x,y)=(y,x)$；

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

②$(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$；

③$(kx,y)=k(x,y)$；

④$(x,x)=x_1^2+\cdots+x_n^2\ge 0$ 等号成立当且仅当 $x=0$.

（2）模、长度： 向量 x 的长度 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$

【概念理解点睛】

（1）当 $\|x\|=1$，称 x 为单位向量；

（2）任一非零向量 $x\ne 0$，都可将其单位化，事实上 $\dfrac{x}{\|x\|}$ 就是单位向量；

（3）正交：当 $(x,y)=0$ 时，称向量 x 与 y 正交.

【概念理解点睛】 零向量与任何向量正交.

3 施密特正交法

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是一组线性无关的向量，可用下述方法把 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 标准正交化。取

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

……

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{(\beta_1,\alpha_r)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_r)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\beta_{r-1},\alpha_r)}{(\beta_{r-1},\beta_{r-1})}\beta_{r-1}$$

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关，且两两正交，与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 等价.

再把 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 单位化 $\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\gamma_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\cdots,\gamma_r=\dfrac{\beta_r}{\|\beta_r\|}$

即得到一组与原向量组等价的两两正交的单位向量 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$，这个方法称为线性无关向量组标准正交化的施密特方法.

4 规范正交基（数一）

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，若 $(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1,i=j\\0,i\ne j\end{cases},i,j=1,2,\cdots,n$，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组标准正交基. （规范正交基）

◇基本题型与典型例题◇

【题型 1】 讨论向量组的线性相关性

思路与方法：（1）利用定义；（2）利用行列式，利用秩

【例 1】 已知向量组 $\alpha_1=(1,1,2,1)^T,\alpha_2=(1,0,0,2)^T,\alpha_3=(-1,-4,-8,k)^T$ 线性相关，求 k

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

【题型 2】求向量组的极大无关组和秩

思路与方法：化为阶梯形

【题型 3】有关向量组或矩阵秩的计算与相关的证明

思路与方法：（1）数值型，用初等变换化为阶梯形；（2）抽象型，利用秩的相关结论；

（3）利用秩的定义

【例 2】已知向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2=(2,3,4,5)^T,\alpha_3=(3,4,5,6)^T,\alpha_4=(4,5,6,7)^T$ 则该向量组的秩是_______

【例 3】已知向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,1)^T,\alpha_2=(2,0,t,0)^T,\alpha_3=(0,-4,5,-2)^T$ 的秩是 2，则 $t=$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

第四讲　线性方程组

◇考试内容◇

线性方程组的克莱姆（Cramer）法则 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件 非齐次线性方程组有解的充分必要条件 线性方程组解的性质和解的结构 齐次线性方程组的基础解系和通解 解空间 非齐次线性方程组的通解

◇考试要求◇

1．会用克莱姆法则.

2．理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件.

3．理解齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法.

4．理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念.

5．掌握用初等行变换求解线性方程组的方法.

◇基本概念、公式与方法精讲◇

一、概念

1 线性方程组的三种表达形式

• 一般形式（代数形式）

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (1)$$

称为 m 个方程 n 个未知量的非齐次线性方程组.

• 矩阵形式

设 $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则（1）可表为 $A_{m\times n}x=b \quad (Ax=0)$.

• 向量形式

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

则（1）可表为

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$$
$$(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0).$$

【概念理解点睛】

系数矩阵的行数=方程的个数，系数矩阵的列数=变量的个数.

2 解与通解

解：若 $Ax_0=b$，则 x_0 称为 $Ax=b$ 的 一个解.

通解：当方程组有无穷多解时，则称它的全部解为该方程组的通解.

【概念理解点睛】

齐次线性方程组总有零解.

公共解：若 $Ax_0=b_1$，$Bx_0=b_2$，则 x_0 称为 $Ax=b_1$，$Bx=b_2$ 的公共解.

三、齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构

1 引例

（1）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\2x_1+2x_2+2x_3=0\\5x_1+5x_2+5x_3=0\end{cases}$ 有自由变量（2 个）；

（2）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_2+x_3=0\\x_3=0\end{cases}$ 只有零解，无自由变量；

（3）$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\3x_1+2x_2+x_3=0\\x_2+2x_3=0\\5x_1+4x_2+3x_3=0\end{cases}$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\0&1&2\\5&4&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$得同解方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\x_2+2x_3=0\end{cases}$有自由变量（1 个）.

2 解的判定

定理 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解（只有零解）的充要条

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

件为 $r(A)<n$ （$r(A)=n$）.

推论 齐次线性方程组 $A_{n\times n}x=0$ 有非零解(只有零解)的充要条件为 $|A|\neq 0$ ($|A|=0$).

【方法运用点睛】

i）对于 $A_{m\times n}x=0$，若 $m<n$ 则 $A_{m\times n}x=0$ 有非零解；

ii） $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$， $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，有非零解（只有零解）

$\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关（无关）的

$\Leftrightarrow$ $r(A)<n$ （$r(A)=n$）

$\Leftrightarrow$ A 的列向量线性相关（无关）的；

iii）讨论 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关性的常用方法：

1° 用定义；

2° 用秩：$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r$，若 $r<n$ 则相关；若 $r=n$ 则无关；

3° 用行列式（维数等于个数）；

4° 用线性方程组：$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 有无非零解.

【例 4.1】 设 $\alpha_1=(a,0,c)^T,\alpha_2=(b,c,0)^T,\alpha_3=(0,a,b)^T$ 线性无关，则 a,b,c 必满足的关系式________.

3 解的结构

（1）解的性质

齐次线性方程组任二个解的线性组合仍为其解；若 x_1,x_2 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的两个解，则 $k_1x_1+k_2x_2$ （k_1,k_2 为任意常数）也是它的解.

推广：若 $x_1,\cdots,x_s$ 均为 $Ax=0$ 的解，则 $k_1x_1+\cdots+k_sx_s$ 也是 $Ax=0$ 的解.

（2）齐次线性方程组的基础解系（解的极大线性无关组）

设 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 是 $Ax=0$ 的解向量，如果：（1） $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 线性无关；（2） $Ax=0$ 的任一个解向量可由 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 线性表示，则称 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系.

（3）通解

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

定理 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，若 $r(A)=r<n$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 存在基础解系，且基础解系含 $n-r$ 个解向量.

（4）求解齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 的方法步骤：

1° 用初等行变换化系数矩阵 A 为行阶梯形；

2° 若 $r(A)=n$，则无基础解系，只有零解；若 $r(A)<n$，化行阶梯形为行最简形，写出等价的方程组，确定自由变量，并把所有的变量用自由变量来线性表示，得到基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r(A)}$；

3° 写出通解 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r(A)}\xi_{n-r(A)}$.

【例 4.2】 λ 为何值时，方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=0\\2x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 只有零解？有非零解？有非零解时，求其通解.

三、非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

1 引例

（1）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1+x_2+x_3=2\end{cases}$

$\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\1&1&1&\vdots&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\0&0&0&\vdots&1\end{pmatrix}$ 出现了矛盾方程 $r(A)=1\neq r(A,b)=2$.

（2）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\\quad\ \ x_2+x_3=0\\\qquad\quad x_3=2\end{cases}$ 有唯一解，$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&1&2\end{pmatrix}$，$r(A)=r(A,b)=3$.

（3）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1+x_2-x_3=3\end{cases}$，$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$ 有无穷多解. $r(A)=r(A,b)=2<3$.

2 解的判定

定理 $A_{m\times n}x=b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A\,\vdots\,b)=r$，且当 $r=n$ 时 $\Leftrightarrow A_{m\times n}x=b$ 有唯一解；当 $r<n$ 时 $\Leftrightarrow A_{m\times n}x=b$ 有无穷多解.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

$A_{m\times n}x=b$无解$\Leftrightarrow r(A)\neq r(A\,\vdots\,b)\Leftrightarrow r(A)+1=r(A\,\vdots\,b)$.

【方法运用点睛】

i）当$m=n$时，$|A|=0$是$Ax=b$的无解（或有无穷多解）的必要非充分条件.

ii）按向量形式：$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b$（$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$）有解（无解）

$\Leftrightarrow b$可（不可）由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示$\Leftrightarrow b$可（不可）由$A$的列向量线性表示

3 解的结构

（1）解的性质

1°设$Ax_1=b,Ax_2=b$，则$A(x_1-x_2)=0$，即x_1-x_2是$Ax=0$的解；

2°设$Ax_1=b,Ax_0=0$，则$A(x_1+x_0)=b$，即x_1+x_0是$Ax=b$的解.

（2）非齐次线性方程组的通解

若$Ax=b$有无穷多解，则其通解为$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r(A)}\xi_{n-r(A)}+\eta$，其中$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r(A)}$为$Ax=0$的一组基础解系，$\eta$是$Ax=b$的一个特解.

（3）求解非齐次线性方程组的通解的步骤：

1°用初等行变换化增广矩阵$\overline{A}=(A\,\vdots\,b)$为行阶梯形；

2°若$r(A)\neq r(A\,\vdots\,b)$，则$Ax=b$无解；

若$r(A)=r(A\,\vdots\,b)$，化行阶梯形为行最简形，写出等价的方程组，观察有无自由变量. 若无，则由行最简形可以得到唯一解；若有，则把所有的变量都用自由变量来线性表示，则可得到通解.

【例 4.3】设

$\alpha_1=(1\ \ -1\ \ 1\ \ -1)^T,\alpha_2=(-3,\ 4,\ -1,\ 2)^T,\alpha_3=(4,-5,3,b-2)^T,\beta=(0,a,5,-1)^T$，问$a,b$满足什么条件时：（1）$\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；（2）$\beta$能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一线性表示，并写出表示；（3）$\beta$能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，但表法不唯一，并写出表示；

◇基本题型和典型例题◇

【题型 1】有关线性方程组的基本概念题

思路与方法：解的判定、性质和结构

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

【例 1】设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则线性方程组 $(AB)x=0$ （ ）

（A）当 $n>m$ 时，仅有零解（B）当 $n>m$ 时，必有非零解

（C）当 $m>n$ 时，仅有零解（D）当 $m>n$ 时，必有非零解

【题型 2】有关基础解系的命题

思路与方法：基础解系是解向量组的极大线性无关组，具体可验证三条

【例 2】设 $A^*\neq 0$，ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 为 $Ax=b$ 的互不相等的解向量，则 $Ax=0$ 的基础解系所含解向量的个数为（ ）

（A）0 （B）1 （C）2 （D）3

【题型 3】线性方程组的求解

【例 3】已知菲齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=-1 \end{cases}$ 有三个线性无关的解

（I）证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$

（II）求 a,b 的值及方程组的通解

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

第五讲 特征值和特征向量

◇考试内容◇

矩阵的特征值和特征向量的概念、性质 相似变换、相似矩阵的概念及性质 矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵 实对称矩阵的特征值、特征向量及其相似对角矩阵

◇考试要求◇

1．理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵的特征值和特征向量.

2．理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法.

3．掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.

◇基本概念、公式与方法精讲◇

一、引言

二、相似矩阵的概念与性质 方阵对角化的条件

1 相似的概念

设 A,B 是 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 P，使 $B=P^{-1}AP$，则称矩阵 A 与 B 相似，记为 $A\sim B$，称 $P^{-1}AP$ 是对 A 作相似变换.

【概念理解点睛】

i）矩阵的相似关系仅针对方阵而言；

ii）矩阵的相似关系是一种特殊的等价关系，即相似必等价；

iii）相似关系满足“三性”：反身性、对称性、传递性.

2 性质

若矩阵 $A\sim B$，则

（1） $A^T\sim B^T$； $A^{-1}\sim B^{-1}$； $A^n\sim B^n$（$n\in N$）； $A^*\sim B^*$（A,B 可逆）.

（2） $r(A)=r(B)$； $|A|=|B|$； $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$； $trA=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=trB$；

3 方阵可对角化

若矩阵 A 能与对角阵 Λ 相似，则称矩阵 A 可相似对角化，记为 $A\sim\Lambda$，称 Λ 是 A 的相似标准形.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

若 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\underline{\underline{记作}}\Lambda$

$\Leftrightarrow AP=P\Lambda$，（将 P 按列分块 $P=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$）

$\Leftrightarrow A[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow [A\eta_1,A\eta_2,\cdots,A\eta_n]=[\lambda_1\eta_1,\lambda_2\eta_2,\cdots,\lambda_n\eta_n]$

$\Leftrightarrow$ 利用矩阵相等，得到 $A\eta_i=\lambda_i\eta_i,(\eta_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n)$.

定理 （方阵可对角化的充要条件）

n 阶方阵 A 可对角化的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

【方法运用点睛】

若 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\underline{\underline{记作}}\Lambda$，则

$$A^n=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1}=P\begin{bmatrix}\lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^n\end{bmatrix}P^{-1},$$

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\cdots\lambda_n.$$

三、方阵的特征值和特征向量

1 定义

设 A 为 n 阶矩阵，若存在常数 λ 和非零 n 维列向量 α，使 $A\alpha=\lambda\alpha$，则称 λ 为 A 的特征值，α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量.

【概念理解点睛】

i）特征值问题仅是针对方阵而言的；②特征向量 $\alpha\neq 0$；

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

ii）若向量α是A的特征向量，则$A\alpha$与α线性相关；

iii）特征值与其对应的特征向量是一对多的：$A(k\alpha)=\lambda(k\alpha)(k\neq 0)$.

2 求法

λ为A的特征值，α是A的属于特征值λ的特征向量$\Leftrightarrow A\alpha=\lambda\alpha(\alpha\neq 0)$

$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=0$（或$(A-\lambda E)x=0$）有非零解.

行列式$f(\lambda)=|\lambda E-A|$称为方阵A的特征多项式，$|\lambda E-A|=0$称为方阵A的特征方程. 显然，n阶矩阵A的特征多项式是λ的n次多项式。特征多项式的k重根也称为k重特征值.

对于抽象矩阵，根据特征值和特征向量的定义及其性质推导出特征值和特征向量.

对于具体的数字矩阵，采用解方程法，具体步骤如下：

（1）特征值的求解方法

解特征方程$|\lambda E-A|=0$，得到A的全部特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$.

（2）特征向量的求解方法

对每个不同的特征值λ_i，解齐次线性方程组$(\lambda_i E-A)x=0$，求出它的基础解系$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\left(k_1,k_2,\cdots,k_s\text{不全为}0\right)$，即为矩阵$A$的属于特征值$\lambda_i$的特征向量.

【例 5.1】求矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\1&2&3\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

3 特征值、特征向量的基本运算性质

性质 1 若λ是矩阵A的特征值，x是A的属于λ的特征向量，则

（1）对任意的常数k，$k\lambda$是kA的特征值，x是kA的属于$k\lambda$的特征向量；

（2）对任意的自然数m，λ^m是A^m的特征值，x是A^m的属于λ^m的特征向量；

（3）A的多项式$f(A)$的特征值为$f(\lambda)$，x是$f(A)$的属于$f(\lambda)$的特征向量；

（4）当A可逆时，λ^{-1}是A^{-1}的特征值，x是A^{-1}的属于λ^{-1}的特征向量；

（5）当A可逆时，$|A|/\lambda$是A^*的特征值，x是A^*的属于$|A|/\lambda$的特征向量；

（6）λ是矩阵A^T的特征值，但是x不一定是A^T的属于λ的特征向量；（特征值相同，但

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

对应的特征向量不一定相同。)

(7) $B=P^{-1}AP$ 的特征值为 λ，$P^{-1}x$ 是 B 的特征向量. 设 n 阶矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)$ 的 n 个特征值

性质 2 若 x_1 和 x_2 都是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量，则 $k_1x_1+k_2x_2$ 也是 A 的属于 λ_0 的特征向量（其中 k_1,k_2 是任意常数，但 $k_1x_1+k_2x_2\neq 0$）.

性质 3 不同特征值的特征向量是线性无关的.

性质 4 若矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$ 其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$ 是 A 的主对角元之和，称为矩阵 A 的迹，记作 $tr(A)$；

(2) $\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$.

【例 5.2】 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{bmatrix}$ 问 A 能否相似对角化？若能，求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵，并求 A^n.

四、实对称矩阵的相似对角化

1 实对称矩阵特征值、特征向量的性质

性质 1 实对称矩阵的特征值为实数.

性质 2 实对称矩阵 A 对应于不同特征值的特征向量是相互正交的.

性质 3 n 阶实对称矩阵 A 必可相似对角化，且总存在正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=diag\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right)$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值.

2 实对称矩阵对角化的方法

将实对称矩阵 A 利用正交矩阵 Q，使 Q^TAQ 为对角阵的方法：

(1) 由特征多项式求出矩阵 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

(2)特征向量：对每个特征值 λ_i，解 $(\lambda_i E-A)X=0$，求出它的基础解系 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$；

(3) 正交化：利用施密特正交化方法将属于同一特征值 λ_i 的特征向量正交化，得到 $Y_{i1},Y_{i2},\cdots,Y_{ik}$；

(4) 单位化：将两两正交的向量都单位化；

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

（5）得到正交矩阵 P：将得到的向量按列排成 n 阶矩阵，即为所求的正交矩阵 P；

（6）写出相似关系式：$P^{-1}AP=\Lambda$，其中 λ_i 是与 P 中的列向量是相应的.

【例 5.3】 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q，使 Q^TAQ 对角阵.

◇基本题型与典型例题◇

【题型 1】方阵特征值、特征向量的求解

思路与方法：分数值型与抽象型

【例 1】设 A 为 3 阶实对称矩阵，且满足条件 $A^2+2A=0$，已知 $r(A)=2$，求 A 的全部特征值。

【题型 2】特征值、特征向量的逆问题（求矩阵中的参数或矩阵）

【例2】设矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}$，且 $|A|=-1$，又设A 的伴随矩阵 A^* 有特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$，求 a,b,c 和 λ_0 的值.

【题型3】可对角化的判定及其逆问题

【例 3】设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{bmatrix}$，求 A 的全部特征值判断是否可相似对角化，若可对角化求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

第六讲　二次型

◇考试内容◇

二次型及其矩阵表示 合同变换与合同矩阵 二次型的秩 惯性定理 二次型的标准形和规范形 用正交变换和配方法化二次型为标准形 二次型及其矩阵的正定性

◇考试要求◇

1. 掌握二次型及其矩阵表示，了解二次型秩的概念，了解合同变换与合同矩阵的概念，了解二次型的标准形、规范形的概念以及惯性定理.

2. 掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，会用配方法化二次型为标准形.

3. 理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法.

◇基本概念、公式与方法精讲◇

一、二次型的定义和矩阵表示

1 定义

n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \quad ①$$

称为 n 元二次型，简称二次型.

2 二次型的矩阵表示、二次型的秩

由于 $x_ix_j=x_jx_i$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ij}x_jx_i(i<j)$

于是①式可以写成

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\&+a_{12}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\&+\cdots\\&+a_{1n}x_nx_1+a_{2n}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\=&(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\quad ②\end{aligned}$$

记 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$，$A=A^T$

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

任意一个二次型都是和它的实对称矩阵是一一对应的.

实对称阵 A 的秩就叫做二次型 f 的秩.

【例 6.1】写出二次型 $f=x^2-3z^2-4xy+yz$ 的实对称矩阵.

3 矩阵合同

定义 设 A,B 为 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 C，使得 $B=C^TAC$，则称 A 与 B 合同，记作 $A\simeq B$. 这种对 A 的运算叫做的合同变换.

【概念理解点睛】

i）合同变换仅针对方阵而言，是一种特殊的等价变换，且满足“三性”：反身性、对称性、传递性；

ii）合同变换不改变矩阵的秩和对称性.

二、化二次型的标准形

1 标准形的定义

只含平方项的二次型，称为二次型的标准形，其中正平方项的个数称为正惯性指数，负平方项的个数称为负惯性指数，在标准形中，若平方项的系数为 $1,-1,0$，则称其为二次型的规范形.

2 方法

（1）正交变换法

• 把二次型表示为矩阵形式 x^TAx；

• 求出 A 的全部互异特征值 λ_i，设 λ_i 是 n_i 重根；

• 对每个特征值 λ_i，解齐次线性方程组 $(\lambda_iE-A)x=0$，求得基础解系，即属于 λ_i 的特征向量；

• 将 A 的属于同一个特征值的特征向量正交化；

• 将全部向量单位化；

• 将正交单位化后向量为列,且按 λ_i 在对角矩阵的主对角线上的位置构成正交矩阵 Q；

• 令 $x=Qy$，得 $x^TAx=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.

【例 6.2】 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=x_1^2-5x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 的秩为 2，且 $(2,1,2)^T$ 是 A 的特征向量，那么经正交变换二次型的标准形是__________.

（2）配方法

• 如二次型中至少有一个平方项，不妨设 $a_{11}\neq 0$，则对所有含 x_1 的项配方（经配方后所余各项中不再含 x_1），如此继续配方，直至每一项都包含在各完全平方项中，引入新变量 $y_1,y_2,\cdots,y_n$。由 $y=C^{-1}x$，得 $x^TAx=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$.

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

• 如二次型中不含平方项，只有混合项，不妨设$a_{12} \neq 0$，则可令

$$x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3, \cdots, x_n = y_n$$

经此坐标变换，二次型中出现$a_{12}y_1^2 - a_{12}y_2^2$后，再按①实行配方法.

【例 6.3】 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3$，

（1）利用正交变换将二次型f化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵；

（2）用配方法化二次型为标准形.

三、正定二次型和正定矩阵

1 定义

若二次型$f = X^TAX$对任何$X \neq 0$都有$f > 0$，则称f为正定二次型，正定二次型的矩阵A称为正定矩阵.

2 判别二次型的正定性

一个二次型x^TAx，经过可逆线性变换$x = Cy$，化为$y^T(C^TAC)y$，其正定性保持不变，即当$x^TAx \overset{x=Cy}{=} y^T(C^TAC)y \quad (C\text{可逆})$时，等式两端的二次型有相同的正定性.

一个二次型x^TAx（或实对称矩阵A），通过坐标变换$x = Cy\ (C\text{可逆})$，将其化为标准形（或规范形），$y^T(C^TAC)y = \sum_{i=1}^{n} d_iy_i^2$（或将$A$合同于对角阵，即$C^TAC = \Lambda$），就容易判别其正定性.

正定二次型的判别法（充要条件）

（1）f的标准形的n个系数全为正；

（2）f的正惯性指数为n；

（3）f的矩阵A的特征值全大于零；

（4）存在可逆阵P，使$P^TAP = E$或$A = P^TP$；

（5）f的矩阵A的各顺序主子式全大于零.

【例 6.4】 问a为何值时，$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + (a+1)x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3$为正定的.

◇基本题型与典型例题◇

【题型 1】化二次型为标准形

【例 1】$f(x_1,x_2,x_3) = x^TAx = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3\ (b > 0)$，其中$A$的特征值之和为 1，积为-12.（1）求$a$，$b$；（2）用正交变换将二次型$f$化为标准形。

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列

QQ:159740804 http://www.xztxxw.com

【题型 2】正定的判定

【例 2】 设 A 为 $m\times n$ 的实对称矩阵，E 为 n 阶单位阵，已知矩阵 $B=\lambda E+A^TA$，证明：当 $\lambda>0$ 时，B 为正定矩阵

新东方在线 www.koolearn.com 网络课堂电子教材系列